

# 可信测度空间下的似乘算子模糊概率积分研究

赵 辉, 姜欣格, 单云霄

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

**摘 要:** 模糊概率积分是模糊数学的一个重要部分, 是将模糊概率与积分相结合的一种积分形式。通过  $t$ -模和  $s$ -模定义条件设计了一个似乘算子和似和算子, 又构建了一个全新的可信测度, 并在可信测度空间下结合似乘算子重新定义了 Sugeno 模糊概率积分, 根据新的 Sugeno 模糊概率积分定义获得了该积分相应的线性和非线性性质, 并给出相应的证明, 这为 Sugeno 模糊概率积分理论的丰富和发展提供依据。

**关键词:**  $t$ -模;  $s$ -模; 似乘算子; 似和算子; 可信测度; Sugeno 模糊概率积分

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.02.022

中图分类号: O29 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2021)02-0161-06

## Research on Generalized Sugeno Fuzzy Probability Integral Based on $t$ -Modular Operator

ZHANO Hui, JIANG Xin-ge, SHAN Yun-xiao

(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** Fuzzy probability integral is an important part of fuzzy mathematics, and it is an integral form which combines fuzzy probability with integral. In this paper, a quasi-multiplication operator and a quasi-sum operator are designed by using the definition conditions of  $t$ -triangular module and  $s$ -triangular module. A new credible measure is constructed. The Sugeno fuzzy probability integral is redefined by combining the quasi-multiplication operator in the trusted measure space. According to the new definition of Sugeno fuzzy probability integral, the corresponding linear and nonlinear properties of the integral are obtained, giving the corresponding proof. All these provide the basis for the enrichment and development of Sugeno fuzzy probability integral theory.

**Keywords:**  $t$ -triangular module;  $s$ -triangular module; quasi-multiplication operator; quasisum operator; trusted measure; Sugeno fuzzy probability integral

## 0 引 言

1974年, 日本学者 Sugeno 首先提出了模糊测度与积分的概念。模糊测度作为一个全新的理论得到了快速的发展。模糊积分作为由传统积分演化而来

的一种积分, 具有两种形式一种是具有可加性的模糊积分; 另一种是不具有可加性的模糊积分, 后者是现在研究的主要内容。

1984年王震源<sup>[1]</sup>定义了集函数的“自连续”与“零可加”。2002年 HABIL E 等<sup>[2]</sup>研究了经典概率论在模糊概率论中是否具有有效性的问题, 由此提

收稿日期: 2019-07-11

基金项目: 四川省科技计划项目(2016JZ0014-1); 黑龙江省自然科学基金(A201214)。

作者简介: 赵 辉(1963—), 男, 教授, 硕士研究生导师;

单云霄(1995—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 姜欣格(1994—), 女, 硕士研究生, E-mail: 815519400@qq.com。

出了模糊概率的概念,并将一般变量演变为模糊随机变量,在模糊概率条件下证明了中心极限定理。2003年<sup>[5]</sup> EN-LIN LÜ等利用区间概率对模糊事件的随机变量进行了研究,最终得到了模糊概率定理,与此同时还对其数学期望和方差的相关内容进行了研究。2005年 MESIAR R<sup>[6]</sup>首先对一般的模糊积分及性质进行了研究,又对正则模糊积分进行了研究,最后将模糊测度与积分进行了总结。2006年成和平<sup>[7]</sup>对模糊值函数的 Sugeno 积分进行了研究,得到了当函数 a. e. 相等时,两个函数积分极限相等;函数积分、极限均相等时,两个函数积分极限相等。

2010年曹兴阳<sup>[8]</sup>先从经典测度的角度研究了随机变量的收敛性,又运用概率论语言对概率进行了研究,并对其收敛性进行分析。同年,李艳红等<sup>[9]</sup>在广义 Sugeno 条件下,对一种非负可积函数积分的确界形式进行研究,又得到了一些运算性质。MERIGO J M 等<sup>[10]</sup>在模糊概率中加入加权平均算子来进行广泛的聚合运算。

模糊积分在模糊数学中占有重要的地位,其中非可加的模糊积分受到学者们的广泛关注<sup>[11-13]</sup>,2012年 Liu Y<sup>[14]</sup>等在直觉模糊值 Sugeno 积分的基础上研究了区间模糊值 Sugeno 积分。2015年 HALAŠ R 等<sup>[15]</sup>对离散 SUGENO 积分进行分析得到了一些新的性质。SMREK P<sup>[16]</sup>在2015年对几种 Sugeno 积分进行了对比分析。2016年 ŠTAJNER-PAPUGA I<sup>[17]</sup>以模糊测度为背景建立积分,得到了 Sugeno 积分特定模糊量的均值。2017年时婧婧<sup>[18]</sup>构造了模糊贝叶斯概率评估模型,用来解决网络信息安全问题,得到了较好的效果。

本文主要通过  $t$ -模和  $s$ -模定义条件设计了一个似乘算子和似和算子,重点对似乘算子进行了研究,在可信测度空间上结合似乘算子,重新定义了广义 Sugeno 模糊概率积分,根据演化的 Sugeno 模糊概率积分定义获得了此积分的一般性质及弱绝对连续性,并给出了可测函数 a. e. 相等时,测度是零可加的等一些定理的证明。

## 1 预备知识

**定义1** 设  $X$  为非空集合,由  $X$  的一些子集构成的  $\sigma$ -代数即为  $F$ ,集函数  $\mu: F \rightarrow [0, \infty]$  是  $F$  上的模糊测度,若满足:

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- 2)  $A \in F, B \in F, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- 3)  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, A_n \in F, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ ,

$n = 1, 2, \cdots$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad (\text{下连续});$$

4)  $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, A_n \in F, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ ,  
 $n = 1, 2, \cdots$ ,

且  $\exists n_0$  使

$$\mu(A_{n_0}) < \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad (\text{上连续}).$$

当  $\mu$  满足 1), 2), 3),  $\mu$  称为下半连续模糊测度;当  $\mu$  满足 1), 2), 4),  $\mu$  称为上半连续模糊测度。

若  $\mu$  是可测空间  $(X, F)$  上的模糊测度,则  $(X, F, \mu)$  称为模糊测度空间。

**定义2** 若  $X$  为有限集合,  $X$  所有子集构成的集合即为  $\tilde{P}(X)$ , 集函数  $\mu: \tilde{P}(X) \rightarrow [0, 1]$  若满足:

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1$ ;
- 2)  $E \in \tilde{P}(X), F \in \tilde{P}(X), E \subseteq F$ , 则  $\mu(E) \leq \mu(F)$ 。

则称  $\mu$  是定义在  $\tilde{P}(X)$  上的正则模糊测度。

**定理1** 概率空间为  $(X, A, P)$ , 概率测度  $P: A \rightarrow [0, 1]$  满足以下条件:

- 1)  $P(X) = 1$ ;
- 2)  $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ ,

$$\text{则 } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

如果  $\{A_n\}$  满足  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ , 则称  $\{A_n\}$  为单调增序列, 记为 “ $A_n \nearrow$ ”;

如果  $\{A_n\}$  满足  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ , 则称  $\{A_n\}$  为单调减序列, 记为 “ $A_n \searrow$ ”。

**定义3** 设  $f$  是模糊测度空间  $(X, F, \mu) \rightarrow [0, \infty]$  的可测函数, 记

$$N_\alpha(f) = \{x \mid f(x) > \alpha\} \quad (\alpha \in [0, \infty))$$

则  $f$  对于  $\mu$  在  $A (A \in F)$  上的 Sugeno 积分  $(S) \int_A f d\mu$  定义为

$$(S) \int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap N_\alpha(f))]$$

**定义4** 映射  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , 若  $\forall a, b, c, d \in [0, 1]$  满足:

- 1) 交换律:  $T(a, b) = T(b, a)$ ;
- 2) 结合律:  $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$ ;
- 3) 单调性:

$$a \leq c, b \leq d \Rightarrow T(a, b) \leq T(c, d);$$

- 4) 边界条件:  $T(1, a) = a$

则称  $T$  为  $[0, 1]$  上的  $t$ -模算子。

## 2 主要结果

**定义4** 设映射  $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $\forall a, b \in (0,1]$ , 构造似乘算子:

$$a \dot{\otimes} b = \frac{ab}{(a+b) - ab}$$

**定理2** 模糊似乘算子  $\dot{\otimes}$  为  $[0,1]$  上  $t$ -模模糊算子, 构造的似乘算子满足  $t$ -模的四个基本条件:

- 1) 交换律:  $T(a, b) = T(b, a)$ ;
- 2) 单调性: 若  $a \leq c, b \leq d$ , 则  $T(a, b) \leq T(c, d)$ ;
- 3) 结合律:  $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$ ;
- 4) 边界条件:  $T(1, a) = a$ .

**证明:**

- 1)  $\forall a, b \in (0,1], a \dot{\otimes} b = b \dot{\otimes} a$ .
- 2)  $\forall a, b, c, d \in (0,1], a \leq c, b \leq d \Rightarrow ab \leq cd$ ,  $a + b \leq c + d$  则

$$\frac{ab}{(a+b) - ab} \leq \frac{cd}{(c+d) - cd}$$

所以  $a \dot{\otimes} b \leq c \dot{\otimes} d$ .

$$\begin{aligned} 3) (a \dot{\otimes} b) \dot{\otimes} c &= \left( \frac{ab}{(a+b) - ab} \right) \dot{\otimes} c = \frac{\frac{abc}{ab + bc + ac - 2abc}}{a \dot{\otimes} (b \dot{\otimes} c)} \\ 4) \forall a \in (0,1], a \dot{\otimes} 1 &= \frac{a}{a + 1 - a} = a. \end{aligned}$$

故  $\dot{\otimes}$  为映射  $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  上的  $t$ -模算子, 似乘算子公式  $a \dot{\otimes} b = \frac{ab}{a+b-ab}$  成立。

**定义5** 设映射  $\perp: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $\forall a, b \in [0,1]$ , 构造似和算子:

$$a \dot{\oplus} b = \frac{a+b}{1-ab}$$

**定理3** 模糊似和算子  $\dot{\oplus}$  为  $[0,1]$  上  $s$ -模算子, 构造的似和算子满足  $s$ -模的4个基本条件:

- 1) 交换律:  $\perp(a, b) = \perp(b, a)$ ;
- 2) 单调性: 若  $a \leq c, b \leq d$ , 则  $\perp(a, b) \leq \perp(c, d)$ ;
- 3) 结合律:  $\perp(\perp(a, b), c) = \perp(a, \perp(b, c))$ ;

- 4) 边界条件:  $\perp(a, 0) = a$ .

**证明:**

- 1)  $\forall a, b \in [0,1], a \dot{\oplus} b = b \dot{\oplus} a$ .
- 2)  $\forall a, b, c, d \in [0,1], a \leq c, b \leq d \Rightarrow ab \leq cd$ ,  $a + b \leq c + d$  则

$$\frac{a+b}{1-ab} \leq \frac{c+d}{1-cd}$$

所以  $a \dot{\oplus} b \leq c \dot{\oplus} d$ .

$$\begin{aligned} 3) (a \dot{\oplus} b) \dot{\oplus} c &= \left( \frac{a+b}{1-ab} \right) \dot{\oplus} c = \frac{\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ac}}{a \dot{\oplus} (b \dot{\oplus} c)} \\ 4) \forall a \in [0,1], a \dot{\oplus} 1 &= \frac{a+1}{1-a} = a. \end{aligned}$$

故  $\dot{\oplus}$  为映射  $\perp: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  上  $s$ -模算子, 似和算子公式  $a \dot{\oplus} b = \frac{a+b}{1-ab}$  成立。

下面给出一种特殊的模糊测度——可信测度:

**定义6** 设  $\mu: F \rightarrow [0,1]$  称为  $(X, F)$  上的一个可信测度,  $F$  表示一个  $\sigma$ -代数。当且仅当:

- 1)  $\emptyset$  处为零: 当  $\emptyset \in F$  时,  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- 2)  $\mu(X) = 1$ ;
- 3) 单调非减性:  $\forall A, B \in F, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- 4) 可信性: 若  $\mu$  为  $(X, F)$  上的集函数,  $\mu'$  为  $(X, F')$  上的集函数,  $F \subset F'$  且  $\forall A \in F$ , 则有  $\mu(A) = \mu'(A)$ ;
- 5) 上连续性:  $\forall \{A_n\} \in F, A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots A_n \supset \cdots$ , 且存在  $n_0$ , 使  $\mu(A_{n_0}) < 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ , 则有

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

则称为可信测度, 可信测度是概率测度的一种特殊形式,  $(X, F, \mu)$  称为可信测度空间。当且仅当  $\forall A, B \in F, \mu(B) = 0$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 取  $B_n = B (n = 1, 2, \cdots)$ , 有  $\lim_n \mu(B_n) = \mu(B) = 0$  称可信测度  $\mu$  是零可加的, 即  $\mu(A \cup B) = \lim_n \mu(A \cup B_n) = \mu(A)$ 。

**定理4** 设  $\mu$  是  $F$  上的可信测度,  $\mu'$  是  $F'$  上的可信测度,  $A, A^c \in F, \mu(A) + \mu(A^c) = 1$ , 则  $\mu$  满足下连续性。

**证明:** 由题意可知, 对  $\forall \{A_n\} \subset F, F \subset F', A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ , 有

$$\begin{aligned} A_1^c \supset A_2^c \supset \cdots \supset A_n^c \supset \cdots, \text{ 且} \\ \lim_n \mu(A_n^c) = \mu\left(\lim_n A_n^c\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \end{aligned}$$

$$\lim_n \mu(A_n^c) = \mu(\lim_n A_n^c) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c)$$

故有

$$\begin{aligned} \lim_n \mu(A_n) &= 1 - \mu(A^c) = \\ 1 - \lim_n \mu(A_n^c) &= 1 - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \\ 1 - \mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \lim_n \mu(A_n) = \\ 1 - \mu(A^c) &= 1 - \lim_n \mu(A_n^c) = \\ 1 - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) &= 1 - \mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = \\ \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \lim_n \mu(A_n) \end{aligned}$$

因此  $\mu$  是下连续的。

下面对可信测度空间下的广义 Sugeno 模糊概率积分进行研究:

定义7 设  $(X, F, \mu)$  是可信测度空间,  $f: X \rightarrow$

$[0, 1]$  是可测函数,  $\mu$  为可信测度,  $\otimes$  是模糊拟乘算子,  $A \in F$ , 将  $f$  在  $A$  上关于 Sugeno 模糊概率积分  $\int_A f d\mu$  定义为

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f) \cap A)]$$

称  $\int_A f d\mu$  为在  $A$  上  $f$  的模糊拟乘算子的 Sugeno 模糊概率积分。其中

$$N_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \geq \alpha, x \in X\} (\alpha \in [0, 1])$$

当  $\int_A f d\mu \leq 1$  时, 在  $A$  上  $f$  是可积的,  $X$  上所有非负可积函数组成的集合即  $L_+^1(X)$ 。

定理5 设  $(X, F, \mu)$  是可信测度空间,  $A \in F$ ,  $f$  是可测函数且  $f \in F$ ,  $\mu$  为可信测度,  $\int_A f d\mu$  为在  $A$  上  $f$  的模糊拟乘算子的 Sugeno 模糊概率积分,  $f_1 \in F, f_2 \in F$ , 则:

1) 若  $f_1 \leq f_2$ , 则

$$\int_A f_1 d\mu \leq \int_A f_2 d\mu;$$

2) 对  $\forall c \in [0, 1]$ ,

$$\int_A c d\mu = c \otimes \mu(A);$$

3) 若  $A \supset B$ , 则

$$\int_A f d\mu \geq \int_B f d\mu;$$

$$4) \int_A (f_1 \vee f_2) d\mu \geq \int_A f_1 d\mu \vee \int_A f_2 d\mu;$$

$$5) \int_A (f_1 \wedge f_2) d\mu \leq \int_A f_1 d\mu \wedge \int_A f_2 d\mu.$$

证明: 1) 因为  $f_1 \leq f_2$ , 根据定理2和定义7可知, 有

$$\int_A f_1 d\mu - \int_A f_2 d\mu =$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(A \cap N_\alpha(f_1)) - \alpha \otimes \mu(A \cap N_\alpha(f_2))] =$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} \left[ \frac{\alpha \cdot f_1}{\alpha + f_1 - \alpha \cdot f_1} - \frac{\alpha \cdot f_2}{\alpha + f_2 - \alpha \cdot f_2} \right] =$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} \left[ \frac{\alpha^2 \cdot (f_2 - f_1)}{(\alpha + f_1 - \alpha f_1)(\alpha + f_2 - \alpha f_2)} \right] \leq 0$$

所以  $\int_A f_1 d\mu \leq \int_A f_2 d\mu$ , 以下证明同理。

$$2) \forall \alpha \in [0, \infty], N_\alpha(c) = \begin{cases} X & \alpha \leq c \\ \emptyset & \alpha > c \end{cases},$$

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(c) \cap A)] =$$

$$c \otimes \mu(A)$$

$$\text{即} \int_A c d\mu = c \otimes \mu(A)$$

3) 因为  $A \supset B, \forall \alpha \in [0, 1], (A \cap N_\alpha(f)) \supset (B \cap N_\alpha(f))$

又因为  $\mu$  具有单调性, 所以

$$\mu(A \cap N_\alpha(f)) \geq \mu(B \cap N_\alpha(f)) \text{ 故}$$

$$\int_A f d\mu \geq \int_B f d\mu$$

4)  $A \in F, f_1, f_2$  为可测函数,

$$\int_A (f_1 \vee f_2) d\mu =$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f_1 \vee f_2) \cap A)] \geq$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f_1) \cap A)] \vee \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f_2) \cap A)] =$$

$$\int_A (f_1) d\mu \vee \int_A (f_2) d\mu$$

5)  $A \in F, f_1, f_2$  为可测函数,

$$\int_A (f_1 \wedge f_2) d\mu =$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f_1 \wedge f_2) \cap A)] \leq$$

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f_1) \cap A)] \wedge$$

$$[\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f_2) \cap A)] =$$

$$\int_A (f_1) d\mu \wedge \int_A (f_2) d\mu$$

综上所述, 结论成立。

定理6 (弱绝对连续性) 设  $f \in L_1$ , 则对任意的  $\varepsilon > 0$ , 都至少存在一个  $\gamma > 0$ , 当  $A \in F, \mu(A) < \gamma$  时, 有  $\int_A f d\mu < \varepsilon$ 。

证明: 假设结论不成立, 则  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in N$

时,  $A_n \in F$ , 当  $\mu(A_n) < \frac{1}{2n}$  时

$$\int_{A_n} f d\mu \geq \varepsilon_0$$

但由定义 2.2 知

$$\int_{A_n} f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \dot{\otimes} \mu(A_n \cap B_\alpha)] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \mu(A_n \cap B_\alpha) \leq \mu(A_n)$$

因此

$$\varepsilon_0 \leq \int_{E_n} f d\mu \leq \mu(A_n) < \frac{1}{2n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{该形式}$$

并不存在, 故假设不成立。

**定理7** 设  $(X, F, \mu)$  是可信测度空间,  $\mu$  是可信测度,  $f \in L_+^1(X)$ ,  $\forall A \in F$ , 则

$$\int_A f d\mu = \sup_{E \in F} [\inf_{x \in E} f(x) \dot{\otimes} \mu(E \cap A)]$$

证明:  $\forall \alpha \in [0,1]$ ,  $x \in N_\alpha(f)$ ,  $f(x) \geq \alpha$  左右同取下确界:

$$\inf_{x \in N_\alpha(f)} f(x) \geq \inf_{x \in N_\alpha(f)} \alpha = \alpha$$

因为模糊似乘算子  $\dot{\otimes}$  具有单调性,  $N_\alpha(f) \in F$ ,

$$\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(f) \cap A) \leq \inf_{x \in N_\alpha(f)} f(x) \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(f) \cap A) \leq$$

$$\sup_{E \in F} [\inf_{x \in E} f(x) \dot{\otimes} \mu(E \cap A)]$$

式子左右同取上确界, 且式子右边与  $\alpha$  无关,  $\forall \alpha \in [0,1]$ , 从而

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(f) \cap A)] \leq$$

$$\sup_{E \in F} [\inf_{x \in E} f(x) \dot{\otimes} \mu(E \cap A)]$$

又有  $\forall E \in F$ , 对式子两端同时取下确界:

设  $\beta = \inf_{x \in E} f(x) \leq f(x)$ ,  $\beta \in [0,1]$ , 可得  $E \subset$

$N_\beta(f)$ , 根据  $\dot{\otimes}$  的单调性, 有

$$\inf_{x \in E} f(x) \dot{\otimes} \mu(E \cap A) \leq \beta \dot{\otimes} \mu(N_\beta(f) \cap A) \leq$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(f) \cap A)] = \int_A f d\mu$$

再对式子左右同取上确界, 等式右边与  $E$  无关, 所以

$$\sup_{E \in F} [\inf_{x \in E} f(x) \dot{\otimes} \mu(E \cap A)] \leq \int_A f d\mu \text{ 综上所述, 结论成立。}$$

**定理8** 设  $(X, F, \mu)$  是可信测度空间,  $\mu$  是可信测度, 对任意  $A \in F$ ,  $f, g \in L_+^1(X)$ ,  $f = g$  a. e., 当且

仅当  $\mu$  是零可加的,  $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ 。

证明:

**充分性:** 因为  $f = g$ , a. e., 设  $B = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ , 则  $\mu(B) = 0$ ,  $\forall \alpha \in [0,1]$ ,  $x_0 \in N_\alpha(f)$ , 即  $f(x_0) \geq \alpha$ 。

当  $f(x_0) = g(x_0)$  时,  $x_0 \in N_\alpha(g)$ ;

当  $f(x_0) \neq g(x_0)$  时,  $x_0 \in B$ , 因此  $N_\alpha(f) \subset N_\alpha(g) \cup B$ 。

因为  $\mu$  具有单调性和零可加性, 则有

$$\mu(N_\alpha(f)) \leq \mu(N_\alpha(g) \cup B) = \mu(N_\alpha(g))$$

则

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(f))] \leq$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(g))] = \int_A g d\mu$$

$f$  与  $g$  互换位置,  $\forall \alpha \in (0,1)$  依然可得  $N_\alpha(g)$

$\subset N_\alpha(f) \cup B$  成立。因此同理可得  $\int_A f d\mu \geq \int_A g d\mu$ 。

$$\text{故} \int_A f d\mu = \int_A g d\mu。$$

**必要性(反证法):** 若  $\mu$  不具有零可加性, 则有

$\forall A \in F, B \in F, \mu(B) = 0$ , 但  $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) \Leftrightarrow \mu(A \cup B) > \mu(A)$ 。

现规定  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}, g(x) =$

$\begin{cases} 1 & x \in A \cup B \\ 0 & x \notin A \cup B \end{cases}$ , 显然  $f, g \in L_+^1(X)$  且

$$\{x \in X; f(x) \neq g(x)\} =$$

$$(A - A \cup B) \cup (A \cup B - A) =$$

$$(A \cap (A^c \cap B^c)) \cup ((A \cap A^c) \cap (B \cap A^c)) =$$

$$B \cap A^c \subset B$$

因此

$$0 \leq \mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) \leq \mu(B) = 0 \Rightarrow f = g \text{ 有}$$

$$\int_A g d\mu = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(g) \cap X)) =$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \dot{\otimes} \mu(N_\alpha(g))) =$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \dot{\otimes} \mu(A \cup B)) \cup$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \dot{\otimes} \mu(\emptyset)) =$$

$$(1 \dot{\otimes} \mu(A \cup B)) \cup 0 =$$

$$\mu(A \cup B)$$

同理可证  $\int_A f d\mu = \mu(A)$ , 因此可得  $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ , 与前面假设矛盾, 故结论成立。

**定理9** 设  $(X, F, \mu)$  是可信测度空间,  $\mu$  是可信测度,  $f \in L_+^1(X)$ ,  $\forall A \in F$ , 如果在  $A$  上  $f = 0$  a. e.,

则  $\int_A f d\mu = 0$ 。

证明: 设

$$B = \{x \in A; f(x) \neq 0\} = \{x \in A; f(x) > 0\},$$

$$C = \{x \in A; f(x) \neq 0\},$$

则  $A = B \cup C, A \cap B = \emptyset, \mu(B) = 0, \forall \alpha \in (0, 1]$ , 有

$$0 \leq \mu(N_\alpha(f) \cap B) \leq \mu(B) = 0,$$

$$N_\alpha(f) \cap C = \{x \in A; \alpha \leq 0\} = \emptyset$$

因此

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f) \cap A)] = \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f) \cap (B \cup C))] = \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes \mu(N_\alpha(f) \cap B) \cup (\alpha \otimes \\ &\mu(N_\alpha(f) \cap C))] = \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \otimes (0 \cup \mu(\emptyset))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

综上所述, 结论成立。

### 3 结 论

本文构造了一个模糊似乘算子和似和算子, 证明该算子满足  $t$ -模和  $s$ -模条件, 又建立了一个新的测度空间—可信测度, 主要研究了在可信测度空间下将模糊似乘算子与 Sugeno 模糊概率积分相结合得到的新积分形式并证明相关的定理和性质均成立。对于模糊似和算子的部分将在后续研究中作为重点内容进行深入研究。

### 参 考 文 献:

- [1] WANG Z Y. The Autocontinuity of Set Function and the Fuzzy Integral [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1984, 99(1): 195.
- [2] HABIL E, NASR T. On Fuzzy Probability Theory [J]. International Journal of Theoretical Physics, 2002, 41(4): 791.
- [3] LÜ En-lin, YOU-Ming Z. Random Variable with Fuzzy Probability [J]. Applied Mathematics & Mechanics, 2003, 24(4): 491.
- [4] MESIAR R. Fuzzy Measures and Integrals [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2005, 156(3): 365.
- [5] 成和平. 模糊值函数的 Sugeno 积分性质 [M]. 系统科学与数学, 2006, 26(3): 264.
- [6] 曹兴阳. 从测度论的观点看随机变量的收敛性 [M]. 和田师范专科学校学报, 2010, 29(3): 201.
- [7] 李艳红, 王贵君. K-拟可加模糊测度空间上的广义 Sugeno 模糊积分 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2010, 37(4): 376.
- [8] LI Y H, WANG G J. K-generalized Sugeno Fuzzy Integrals in Quasi-addable Fuzzy Measure Space [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2010, 37(4): 376.
- [9] MERIGO J M, ENGEMANN K J. Probabilistic Aggregation Operators with the Induced Generalized OWA Operator [C] // IEEE International Conference on Fuzzy Systems. IEEE, 2010: 1.
- [10] MESIAR R. Fuzzy Measures and Integrals [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 156(3): 365.
- [11] YAN-HONG L I, WANG G J. Generalized Sugeno Fuzzy Integrals on K-quasi-additive Fuzzy Measure Space [J]. Journal of Zhejiang University, 2010, 37(4): 376.
- [12] YAN-HONG L I. K-quasi-additive Setvalued Fuzzy Integral Nature of the Expansion [J]. Journal of Northeast Science Edition. 2008, 40(4): 7.
- [13] WU C X, ZHAO L. Three Kinds of the Additivity of Sugeno Integral for Real Functions [M]. 2005.
- [14] 何家儒. 模糊值函数的 Lebesgue 积分 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1985(4): 34.
- [15] HE J R. Lebesgue Integral of Fuzzy Value Function [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science Edition), 1985(4): 34.
- [16] 赵汝怀. (N) 模糊积分 [J]. 数学研究与评论, 1981(4): 55.
- [17] ZHAO R H. (N) Fuzzy Integration [J]. Mathematical Research and Comments, 1981(4): 55.
- [18] 成和平, 阎兰. Fuzzy 值函数的 Sugeno 积分的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(3): 418.
- [19] CHENG H P, HAI L. Sugeno of Fuzzy Function Notes on Integral [J]. Journal of Southwest Normal University (Natural Science Edition), 2005, 30(3): 418.
- [20] LIU Y, KONG Z. Interval Intuitionistic Fuzzyvalued Sugeno Integrals [C] // International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. IEEE, 2012: 89.
- [21] RADOMÍR Halaš, RADKO Mesiar, JOZEF Pócs. A New Characterization of the Discrete Sugeno Integral [J]. Information Fusion, 2016(29): 84.
- [22] SMREK, PETER. Sugeno Integrals with Respect to Level Dependent Capacities [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016(291): 33.
- [23] ŠTAJNER-PAPUGA I, LOZANOV-CRVENKOVIĆ Z, GRUJIĆ G. On Sugeno Integral Based Mean Value for Fuzzy Quantities [C] // IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, 2016: 155.
- [24] 时婧婧. 基于模糊概率的省电力公司网络威胁性评估模型研究 [J]. 网络安全技术与应用, 2017(6): 64.
- [25] SHI Q Q. Provincial Power Company Based on Fuzzy Probability Research on Network Threat Assessment Model [J]. Network Safety Technologies and Applications, 2017(6): 64.

(编辑: 温泽宇)